Volume de sous-variétés algébriques réelles aléatoires

Thomas Letendre (ENS de Lyon)

Montpellier – 30 juin 2017

Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n.
On choisit une sous-variété de codimension r de M “au hasard”.

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, courbure, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, nombres de Betti, caractéristique d'Euler, ...) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, ...
ou un comportement presque sûr.

Polynômes de Kac

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Polynômes de Kac

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Théorème (Kac, 1943)

Soit $P_d = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ *où les* a_i *sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) gaussiennes centrées réduites. On a :*

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{card}\left(P_d^{-1}(0)\right)\right] \sim \frac{2}{\pi} \ln d,$$

quand $d \to +\infty$.

Sous-variétés algébriques réelles aléatoires

Préliminaire : vecteurs gaussiens

$(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N,
Λ opérateur auto-adjoint et défini positif.

Définition

Une variable aléatoire $X \in V$ est dite gaussienne, centrée, de variance Λ, si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Lambda^{-1}x\,, x\right\rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(0, \Lambda)$.

Si $\Lambda = \mathrm{Id}$ on dit que X est réduite. Alors, dans une base orthonormée (e_i), $X = \sum a_i e_i$, où les a_i sont des v.a.i.i.d réelles $\mathcal{N}(0, 1)$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

Notations

Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on note :

- $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$,
- $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}$,
- $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$,
- si $|\alpha| = d$, $\dbinom{d}{\alpha} = \dfrac{d!}{\alpha!}$.

On considère $P \in \mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ aléatoire distribué selon la loi de Kostlan :

$$P = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha,$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

La famille $\left(\sqrt{\binom{d}{\alpha}}X^\alpha\right)_{|\alpha|=d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P , Q\rangle = \frac{1}{\pi^{n+1}d!}\int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z)\overline{Q(z)}e^{-\|z\|^2}\,\mathrm{d}z.$$

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

La famille $\left(\sqrt{\binom{d}{\alpha}}X^\alpha\right)_{|\alpha|=d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0,\dots,X_n]$ pour le produit scalaire :

$$\langle P\,,Q\rangle = \frac{1}{\pi^{n+1}d!}\int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z)\overline{Q(z)}e^{-\|z\|^2}\,\mathrm{d}z.$$

- Un polynôme de Kostlan–Shub–Smale est un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,\mathrm{Id})$ dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0,\dots,X_n]$.
- La distribution de Kostlan est invariante sous l'action de $O_{n+1}(\mathbb{R})$ par précomposition.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

On fixe d, n et $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Définition

Soient $P_1, \ldots, P_r$ des polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$, on note :

$$Z_d = \left(\bigcap P_i^{-1}(0) \right) \cap \mathbb{S}^n.$$

Lemme

Z_d est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de $\mathbb{S}^n$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

On fixe d, n et $r \in \{1, \dots, n\}$.

Définition

Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, on note :

$$Z_d = \left(\bigcap {P_i}^{-1}(0)\right) \cap \mathbb{S}^n.$$

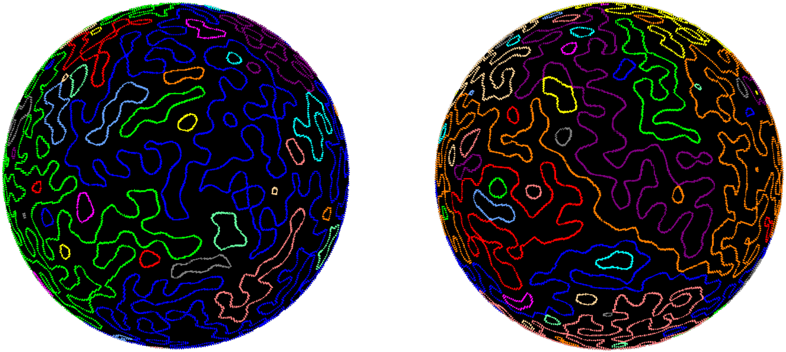
Lemme

Z_d est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de $\mathbb{S}^n$.

Théorème (Kostlan, 1993)

Pour tout n, r et d, on a : $\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_d)] = d^{\frac{r}{2}} \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})$.

Courbes algébriques aléatoires



Courbes algébriques aléatoires de degré 56 sur la sphère, modèle de Kostlan–Shub–Smale.

Images par Maria Nastasescu (Brown University).

Zéros de sections aléatoires

$\mathcal{X}$ variété projective complexe de dimension n,
$(\mathcal{E}, h_{\mathcal{E}})$ fibré hermitien de rang r sur $\mathcal{X}$,
$(\mathcal{L}, h_{\mathcal{L}})$ fibré en droites hermitien positif sur $\mathcal{X}$,
ω forme de Kähler induite par la courbure de $\mathcal{L}$.

On suppose $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ équipés de structures réelles compatibles.

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ espace des sections holomorphes globales de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$ invariantes par conjugaison.

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ est muni d'un produit scalaire L^2 induit par ω, $h_{\mathcal{E}}$ et $h_{\mathcal{L}}$.

Zéros de sections aléatoires

Définition

Soit $s_d \in \mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ section aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$. On note $Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$, où M est le lieu réel de $\mathcal{X}$.

Exemple

Si $\mathcal{X} = \mathbb{CP}^n$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{E}$ est trivial, alors $M = \mathbb{RP}^n$ et

$$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d) = \left(\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \dots, X_n]\right)^r.$$

On retrouve r polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants.

Mesure aléatoire

Lemme

Pour tout d assez grand, Z_d est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de M.

Mesure aléatoire

Lemme

Pour tout d assez grand, Z_d est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de M.

La forme de Kähler ω induit une métrique riemannienne sur M et Z_d.
$|\mathrm{d}V_M|$ mesure riemannienne sur M, $|\mathrm{d}V_d|$ mesure riemannienne sur Z_d.

Z_d définit une mesure de Radon aléatoire :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(M), \qquad \langle Z_d \,, \phi \rangle = \int_{Z_d} \phi \, |\mathrm{d}V_d| \,.$$

Espérance et variance du volume

Espérance du volume

Soit $s_d \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ dans $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ et Z_d le lieu des zéros réels de s_d.

Théorème (L., 2014)

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \phi \, |\mathrm{d}V_M| \right) \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} + \|\phi\|_{\mathcal{C}^0} \, O\Big(d^{\frac{r}{2}-1}\Big),$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ.

Espérance du volume

Soit $s_d \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ dans $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ et Z_d le lieu des zéros réels de s_d.

Théorème (L., 2014)

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d\,, \phi\rangle] = d^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \phi \left|\mathrm{d}V_M\right|\right) \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} + \|\phi\|_{\mathcal{C}^0}\, O\Big(d^{\frac{r}{2}-1}\Big)\,,$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ.

Corollaire (équidistribution en moyenne)

Au sens des mesures de Radon sur M,

$$d^{-\frac{r}{2}}\mathbb{E}[Z_d] \xrightarrow[d\to+\infty]{} \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} \left|\mathrm{d}V_M\right|.$$

Variance du volume

Théorème (L., 2016)

Si $1 \leqslant r < n$, *alors pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d \,, \phi \rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi^2 \left| \mathrm{d} V_M \right| \right) \mathcal{I}_{n,r} + o\!\left(d^{r-\frac{n}{2}} \right),$$

où $\mathcal{I}_{n,r}$ *est explicite et* $0 \leqslant \mathcal{I}_{n,r} < +\infty$.

Variance du volume

Théorème (L., 2016)

Si $1 \leqslant r < n$, *alors pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d \,, \phi \rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi^2 \, |\mathrm{d}V_M| \right) \mathcal{I}_{n,r} + o\!\left(d^{r-\frac{n}{2}}\right),$$

où $\mathcal{I}_{n,r}$ *est explicite et* $0 \leqslant \mathcal{I}_{n,r} < +\infty$.

Corollaire (concentration en probabilité)

Si $1 \leqslant r < n$, *pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$ *on a :*

$$\mathbb{P}\left(\Big| \langle Z_d \,, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi \rangle] \Big| \geqslant d^{\frac{r}{4}} \right) = O\!\left(d^{\frac{r-n}{2}} \right).$$

Le cas des points

Pour un système de n polynômes de Kostlan–Shub–Smale dans $\mathbb{S}^n$ $(n = r)$.

Théorème (Kostlan, 1993)

$$\mathbb{E}[\mathrm{card}(Z_d)] = 2d^{\frac{n}{2}}.$$

Théorème (Dalmao, 2015 ; Armentano–Azaïs–Dalmao–León, 2017)

Il existe $C_n > 0$ explicite tel que :

$$\mathrm{Var}(\mathrm{card}(Z_d)) \sim C_n d^{\frac{n}{2}}.$$

De plus, lorsque $n = 1$,

$$\frac{\mathrm{card}(Z_d) - 2\sqrt{d}}{\left(C_1\sqrt{d}\right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow[d \to +\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

Équidistribution en probabilité

Corollaire

Si $1 \leqslant r < n$, *pour tout ouvert* $U \subset M$,

$$\mathbb{P}\left(Z_d \cap U = \emptyset\right) = O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Équidistribution en probabilité

Corollaire

Si $1 \leqslant r < n$*, pour tout ouvert* $U \subset M$*,*

$$\mathbb{P}\left(Z_d \cap U = \emptyset\right) = O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Soit $\phi_U \in \mathcal{C}^0(M)$, nulle hors de U, strictement positive sur U.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout d assez grand, $\mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi_U \rangle] > d^{\frac{r}{2}}\varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z_d \cap U = \emptyset\right) &= \mathbb{P}\left(\langle Z_d \,, \phi_U \rangle = 0\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\left|\langle Z_d \,, \phi_U \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi_U \rangle]\right| > d^{\frac{r}{2}}\varepsilon\right) \\
&\leqslant \frac{1}{d^r\varepsilon^2}\,\mathrm{Var}(\langle Z_d \,, \phi_U \rangle) \\
&= O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Universalité du lieu des zéros

Théorème (Gayet–Welschinger, 2013)

Soient Σ *une sous-variété fermée de codimension* r *de* $\mathbb{R}^n$ *et* $R > 0$.
Il existe $C_{\Sigma,R} \geqslant 0$ *telle que, pour tout* d *assez grand, pour tout* $x \in M$,

$$\mathbb{P}\left(Z_d \cap B\left(x, \frac{R}{\sqrt{d}}\right) \supset \Sigma' \text{ avec } \left(B\left(x, \frac{R}{\sqrt{d}}\right), \Sigma'\right) \simeq (\mathbb{R}^n, \Sigma)\right) \geqslant C_{\Sigma,R}.$$

De plus, $C_{\Sigma,R} > 0$ *pour* R *assez grand.*

Idées de preuve

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan–Shub–Smale, $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$, définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Il est caractérisé par sa fonction de corrélation $e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)]$.

Remarque

En dérivant sous l'intégrale, $\frac{\partial e_d}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)P(y)\right]$.

Fonction de corrélation

Un polynôme de Kostlan–Shub–Smale, $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$, définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Il est caractérisé par sa fonction de corrélation $e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)]$.

Remarque

En dérivant sous l'intégrale, $\frac{\partial e_d}{\partial x_i}(x, y) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)P(y)\right]$.

$$\begin{aligned} e_d(x, y) &= \sum_{|\alpha|=d=|\beta|} \mathbb{E}[a_\alpha a_\beta] \sqrt{\binom{d}{\alpha}} \sqrt{\binom{d}{\beta}} x^\alpha y^\beta \\ &= \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha \\ &= (\langle x , y \rangle)^d . \end{aligned}$$

Limite d'échelle du noyau de Bergman

Dans le cas général, la fonction de corrélation e_d est le noyau de Bergman de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$.

On a une limite d'échelle locale universelle pour e_d (Dai–Liu–Ma, 2006) :

$$e_d(x, y) \simeq \exp\left(-\frac{d}{2}\|x - y\|^2\right),$$

dès que $D(x, y) \leqslant K\frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Théorème (Ma–Marinescu, 2015)

Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|e_d(x, y)\|_{\mathcal{C}^k} = O\Big(d^{\frac{k}{2}}\exp\left(-C\sqrt{d}D(x, y)\right)\Big),$$

quand $d \to +\infty$, uniformément en (x, y).

Une heuristique pour le volume moyen

Le noyau de Bergman fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$:

$$\simeq \operatorname{Vol}(M)\, d^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_d ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Une heuristique pour le volume moyen

Le noyau de Bergman fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$:

$$\simeq \mathrm{Vol}\,(M)\, d^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_d ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Composantes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$, donc volume de l'ordre de $\left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{n-r}{2}}$.
Finalement $\mathrm{Vol}\,(Z_d)$ est proportionnel à $\mathrm{Vol}\,(M)\, d^{\frac{r}{2}}$.

Formule de Kac–Rice

On se place dans le cas des hypersurfaces ($r = 1$) pour un polynôme de Kosltan–Shub–Smale.

Formule de Kac–Rice

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_d} \phi \, |\mathrm{d}V_d|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{S}^n} \phi(x) \frac{\mathbb{E}\left[\|d_x P\| \,\middle|\, P(x) = 0\right]}{\sqrt{e_d(x,x)}} \, |\mathrm{d}V_{\mathbb{S}^n}| \, .$$

Dans le cas général, $x \mapsto e_d(x,x)$ ne s'annule pas pour d assez grand, et on a une formule similaire.

Asymptotique de l'espérance

$(P(x), d_x P)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e_d(x,x) & \partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{y_n} e_d(x,x) \\ \partial_{x_1} e_d(x,x) & \partial_{x_1}\partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{y_n} e_d(x,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_d(x,x) & \partial_{x_n}\partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{y_n} e_d(x,x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x P$ sachant $P(x) = 0$ est une gaussienne centrée. Sa variance s'obtient à partir de Λ.

Asymptotique de l'espérance

$(P(x), d_x P)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e_d(x,x) & \partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{y_n} e_d(x,x) \\ \partial_{x_1} e_d(x,x) & \partial_{x_1}\partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{y_n} e_d(x,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_d(x,x) & \partial_{x_n}\partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{y_n} e_d(x,x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x P$ sachant $P(x) = 0$ est une gaussienne centrée. Sa variance s'obtient à partir de Λ.

$\dfrac{\mathbb{E}\left[\|d_x P\| \,\middle|\, P(x) = 0 \right]}{\sqrt{e_d(x,x)}}$ ne dépend que de e_d et ses dérivées en (x,x).

On connait les asymptotiques de ces quantités et elles sont universelles. (Résultats de : Tian, Zelditch, Catlin, Dai–Liu–Ma.)

Expression de la variance

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) &= \mathbb{E}\left[\langle Z_d\,,\phi\rangle^2\right] - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{x,y\in Z_d} \phi(x)\phi(y)\,|\mathrm{d}V_d|^2\right] - \mathbb{E}\left[\int_{x\in Z_d} \phi(x)\,|\mathrm{d}V_d|\right]^2.\end{aligned}$$

Par des formules de Kac–Rice on obtient :

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = \int_{x,y\in\mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y)\mathcal{D}_d(x,y)\,|\mathrm{d}V_{\mathbb{S}^n}|^2\,,$$

où la densité $\mathcal{D}_d(x,y)$ ne dépend que de e_d et de ses dérivées en (x,x), (x,y), (y,x) et (y,y).

Comportement de la densité

À longue distance

Pour $K > 0$ bien choisi, on a $\mathcal{D}_d(x,y) = O\left(d^{r-\frac{n}{2}-1}\right)$ uniformément sur :

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \;\middle|\; D(x,y) \geqslant K\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right\}.$$

À courte distance

Sur $\left\{(x,y) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \;\middle|\; D(x,y) < K\frac{\ln d}{\sqrt{d}}\right\}$, on a une limite d'échelle universelle :

$$\mathcal{D}_d\left(x, x + \frac{z}{\sqrt{d}}\right) \simeq d^r \mathcal{D}(\|z\|),$$

où $\|z\| < K \ln d$ dans la carte exponentielle en x.

Asymptotique de la variance

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) \simeq \int_{x\in\mathbb{S}^n}\int_{y\in B(x,K\frac{\ln d}{\sqrt{d}})}\phi(x)\phi(y)\mathcal{D}_d(x,y)\left|\mathrm{d}V_{\mathbb{S}^n}\right|^2$$

$$\simeq d^{-\frac{n}{2}}\int_{x\in\mathbb{S}^n}\left(\int_{\|z\|<K\ln d}\phi(x)\phi\left(x+\tfrac{z}{\sqrt{d}}\right)\mathcal{D}_d\left(x,x+\tfrac{z}{\sqrt{d}}\right)\mathrm{d}z\right)\left|\mathrm{d}V_{\mathbb{S}^n}\right|$$

$$\simeq d^{r-\frac{n}{2}}\left(\int_{x\in\mathbb{S}^n}\phi(x)^2\left|\mathrm{d}V_{\mathbb{S}^n}\right|\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{D}(\|z\|)\,\mathrm{d}z\right).$$

Équidistribution presque sure

On considère une suite aléatoire de polynômes de degrés croissants :

$$(P_d)_{d\in\mathbb{N}^*} \in \prod_{d\in\mathbb{N}^*} \mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \dots, X_n],$$

distribuée selon la loi $\mathrm{d}\nu$, produit des lois de Kostlan.

Corollaire

Si $n \geqslant 3$, alors $\mathrm{d}\nu$-presque surement on a :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n), \qquad \frac{1}{\sqrt{d}} \left\langle Z_{P_d}, \phi \right\rangle \xrightarrow[d\to+\infty]{} \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^n\right)} \int_{\mathbb{S}^n} \phi.$$

Équidistribution presque sure

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{d\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\langle Z_{P_d}\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right)\right)^2\right] = \sum_{d\geqslant 1}\frac{1}{d}\operatorname{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) < +\infty,$$

car $\operatorname{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = O\left(d^{1-\frac{3}{2}}\right)$. Donc d$\nu$-p.s.

$$\sum_{d\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\langle Z_{P_d}\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right)\right)^2 < +\infty,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{d}}\langle Z_{P_d}\,,\phi\rangle \xrightarrow[d\to+\infty]{\mathrm{d}\nu-\mathrm{p.s.}} \frac{\operatorname{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\operatorname{Vol}\left(\mathbb{S}^n\right)}\int_{\mathbb{S}^n}\phi.$$

On conclut par séparabilité de $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$.

The end

Merci de votre attention.